

Correction du TD 3 de traitement du signal

Exercice 1

1. Par définition on a $X(v) = \Pi_{1,1}(v)$. D'après le cours le spectre du signal échantillonné est donc $X_e(v) = v_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Pi_{1,1}(v - nv_e)$.

2. Le spectre du signal $T_e x_e(t)$ est égal à $T_e X_e(v)$. Ce spectre est représenté pour $X(v) = \Pi_{1,1}(v)$ et $T_e = \frac{1}{3}s$ sur la Figure 1.

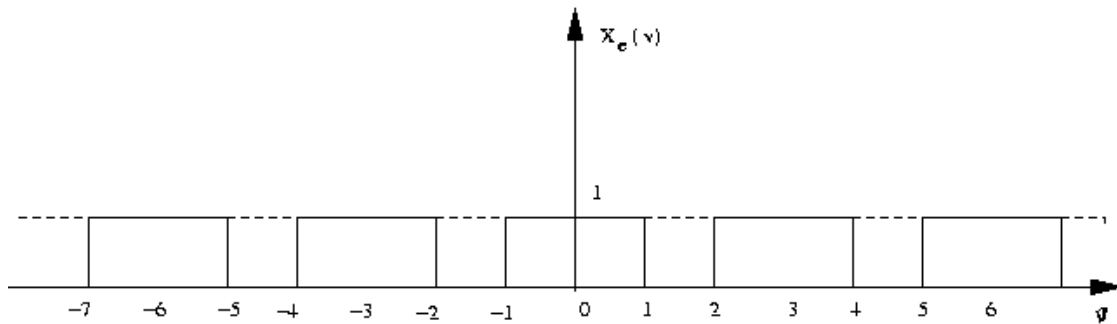


Figure 1 : Spectre $T_e X_e(v)$

3. La Figure 2 représente les spectres $\Pi_{1,1}(v - nv_e)$ pour différentes valeurs de n. La sommation des ces spectres élémentaires permet d'obtenir le spectre du signal échantillonné. Ce dernier spectre est représenté sur la Figure 3.

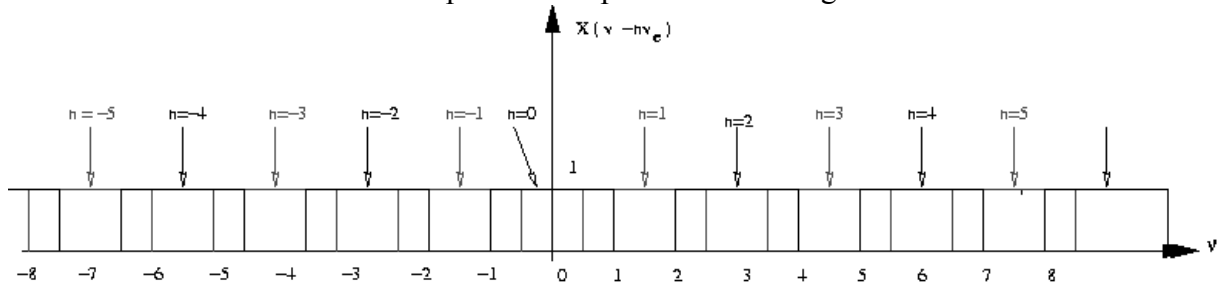


Figure 2 : $\Pi_{1,1}(v - nv_e)$ pour différentes valeurs de n

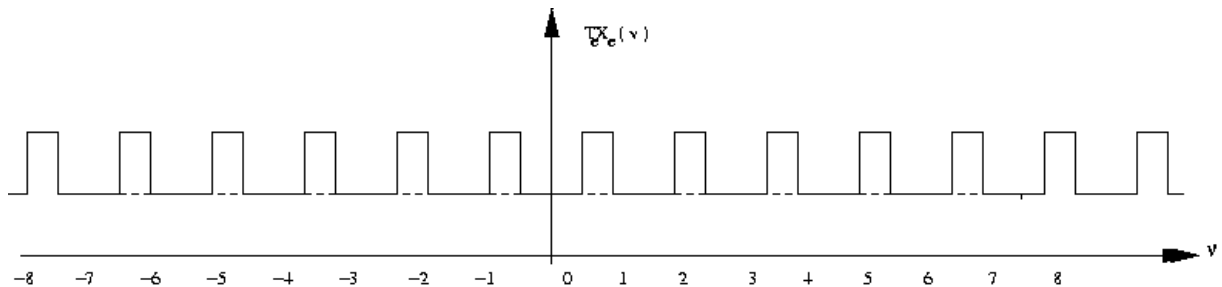


Figure 3 : Spectre $T_e X_e(v)$

4. Il apparaît un phénomène d'aliasing (recouvrement de spectre). En effet, si on fait l'hypothèse que le spectre $X(v) = \Pi_{1,1}(v)$ est tel que $X(\pm 1) = 1$, on a $v_c = 1\text{Hz}$ qui est tel que $X(v_c) \neq 0$. La fréquence d'échantillonnage limite $v_{e,\min}$ doit donc vérifier :

$$v_{e,\min} > 2v_c = 2\text{Hz}.$$

5. Par transformée de Fourier inverse on trouve immédiatement :

$$x(t) = 2\text{sinc}(2\pi t)$$

6. L'instant d'échantillonnage t_n est égal à $t_n = nT_{el} + 0.1 = \frac{n}{3} + \frac{1}{10}$. Il vient immédiatement que l'expression générale d'un échantillon est :

$$x(n) \equiv 2\text{sinc}\left(\frac{(10n+3)\pi}{15}\right)$$

7.

n	t_n (sec)	$x(n)$
0	0.1	1.8710
1	0.43	0.2989
2	0.76	-0.4129
3	1.1	0.1701
4	1.43	0.0903

8.

n	$x(n) \in [kq; (k+1)q[$	$x_q(n) = kq$	$e(n)$
0	$x(0) \in [18q; 19q[$	$x_q(0) = 18q = 1.8$	0.071
1	$x(1) \in [2q; 3q[$	$x_q(1) = 2q = 0.2$	0.0989
2	$x(2) \in [-5q; -4q[$	$x_q(2) = -5q = -0.5$	0.0871
3	$x(3) \in [q; 2q[$	$x_q(3) = q = 0.1$	0.0701
4	$x(4) \in [0q; 1q[$	$x_q(4) = 0q = 0$	0.0903

Exercice 2

1. D'après le cours on a immédiatement :

$$X(v) = A_0 \delta(v) + \frac{A_1}{2i} (\delta(v - f_0) - \delta(v + f_0)) + \frac{A_2}{2i} (\delta(v - 2f_0) - \delta(v + 2f_0))$$

Le spectre d'amplitude

$$|X(v)| = A_0 \delta(v) + \frac{A_1}{2} (\delta(v - f_0) + \delta(v + f_0)) + \frac{A_2}{2} (\delta(v - 2f_0) + \delta(v + 2f_0))$$

est représenté sur la Figure 4.

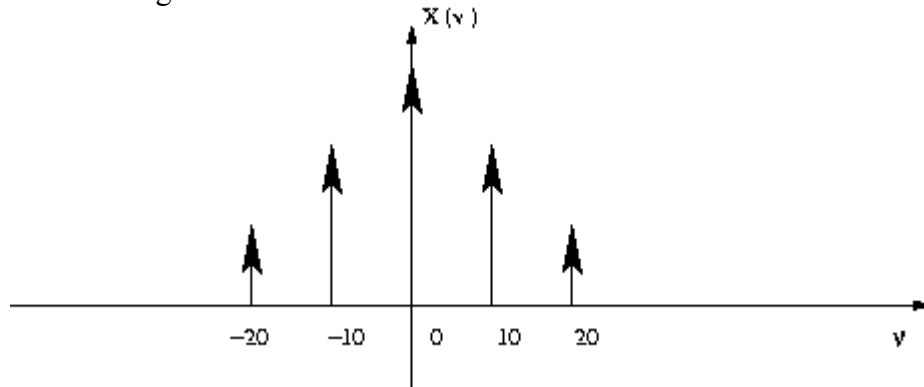


Figure 4 : Spectre d'amplitude $|X(v)|$

2. D'après le cours on a :

$$X_e(v) = v_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(v - nv_e)$$

Pour représenter le spectre d'amplitude on applique la même méthode qu'à l'exercice 1. Ce spectre d'amplitude est représenté sur la Figure 5.

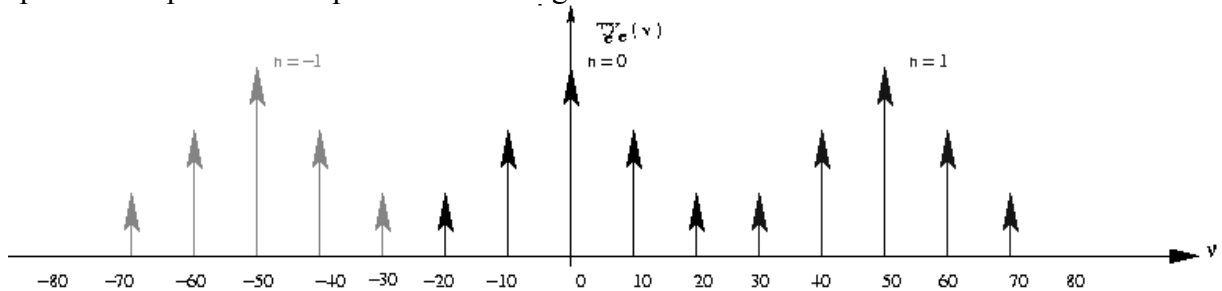


Figure 5 : Spectre d'amplitude $|X_e(v)|$ ($v_e = 50\text{MHz}$)

3. On applique la même méthode que précédemment mais avec une période d'échantillonnage différente. Le spectre obtenu est tracé sur la Figure 6.

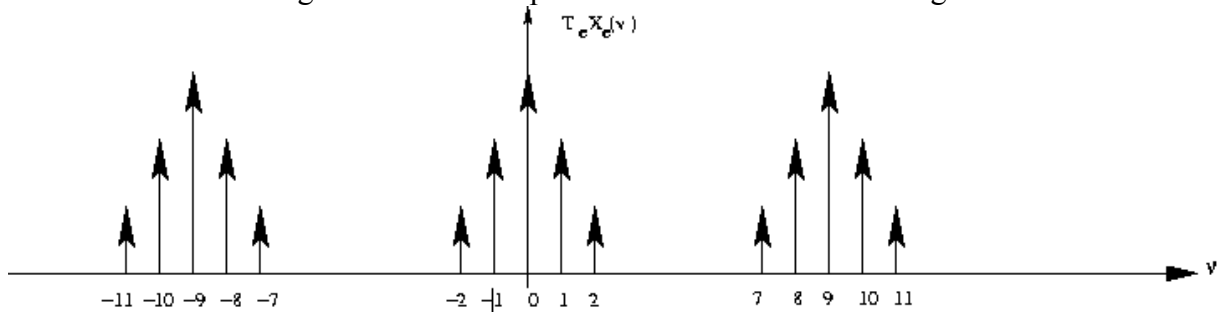


Figure 6 : Spectre d'amplitude $|X_e(v)|$ ($v_e = 9\text{MHz}$)

Analyse :

- Il est clair qu'il apparaît un phénomène de recouvrement de spectre.
- On remarque néanmoins que la forme générale du spectre est conservé et que celui-ci se trouve en fait compressé d'un facteur 10. En utilisant cette information on peut donc, par un processus de multiplication de fréquence, retrouver le signal initial.
- Le phénomène qui apparaît sur la Figure 6 est un exemple de résultat de sous-échantillonnage. On retiendra que la fréquence d'échantillonnage doit satisfaire des conditions particulières pour que ce phénomène apparaisse. Vous pouvez le vérifier en reprenant la dernière question pour une fréquence d'échantillonnage égale à 7 MHz.

Remarque : Le sous-échantillonnage est également illustré, de façon différente, dans l'exercice 2 du TD1 de télécommunication où l'on démontre pour l'application considérée, la relation que doit satisfaire v_e .